Contents

Low pass filter Bessel

1. Definitie van een Bessel filter polynomial

De definitie van de Bessel functie is niets anders dan dat de transfer functie (de verhouding van de uitgang ten opzichte van de ingang) gelijk is aan $H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{e^{+sT}}$. Hierin is $s = j.\omega$ en T gelijk aan een vertraging, dat wil zeggen dat het signaal V_o voor alle frequenties een even grote vertraging heeft ten overstaan van V_{in} ook al is V_{in} vermindert in amplitude naar gelang de frequentie hoger is (voor een Low Pass Filter).

Maken we in deze formule $T = 1$ (de vertagingsfactor) dan wordt de formule

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{e^{+s}} = e^{-s}} \qquad \textbf{n 1}$$

.

Nu is deze formule ook gelijk aan

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{sinush(s) + \cosh(s)}}$$

Hierin is:

$$sinh(s) = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \frac{s^7}{7!} + \frac{s^9}{9!} + \cdots \text{en}$$

$$cosh(s) = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^6}{6!} + \frac{s^8}{8!} + \cdots \text{en}$$

$$\boldsymbol{e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots}$$

Men ziet duidelijk dat

$$\boldsymbol{(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{sinush(s) + \cosh(s)} = e^{-s}} \qquad \textbf{n 2}$$

En toch wordt $\boldsymbol{(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{sinush(s)+\cosh(s)} = e^{-s}}$ n 2) gebruikt en niet ($\boldsymbol{H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{e^{+s}} = e^{-s}}$ n 1) omdat de ontwikkeling van deze reeks ook negatieve wortels heeft, maar dit is puur wiskunde waar ik niet verder op in ga.

Wanneer ik de reeks van $\boldsymbol{e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots}$ zou gebruiken en dan afbreken na bv. 6 termen dan is dit bijlange niet een 5[de] order Bessel functie. We zoeken immers een algemene vorm zoals bij de Butterworth en Chebychev filters namelijk:

$H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{a_0}{b_0 + b_1.s + b_2.s^2 + b_3.s^3 + \cdots}$

Uitgerekend bekomen we voor e^s tot de 6de term

$\boldsymbol{e^{-s}} = \frac{\mathbf{120}}{\boldsymbol{s^5+5.s^4+20.s^3+60.s^2+120.s^1+120}}$ terwijl de juiste uitkomst die we zoeken is

$H(s) = \frac{\mathbf{945}}{\boldsymbol{s^5+15.s^4+105.s^3+420.s^2+945.s^1+945}}$

Wie de juiste wiskundige achtergrond wil napluizen verwijs ik naar een document, vrij te downloaden van het internet, "ECE 580 Network theory Bessel Filter" waarin wordt uitgelegd hoe men een vrij goede benadering bekomt (tot de 10de order filter).Maar ik verwittig jullie dat de wiskundige achtergrond niet eenvoudig is, en men een zeer goede notie moet beheersen van wat Bessel functies eigenlijk zijn.

2. De gebruikte formules

Deze uiteindelijk formules zijn:

$\boldsymbol{a_0 = b_0}$ $\boldsymbol{e b_{i}=} \frac{(2n-i)!}{2^{n-1}.i!.(n-i)!}$	**n 3**

Hierin is n het order van het filter dat men wil uitrekenen (bv. 4de order filter) en i een veranderlijke waarde van 0 tot $n-1$, en ! is permutatie dat wil zeggen $4! = 1.2.3.4$ (wat ik in school zou moeten geleerd hebben)

Laten we dit nu eens uitproberen op een filter van de 1ste, 2de en 3de orde.

Voor 1ste orde is $n = 1$ en $i = 0$

Dan wordt onze formule:

$b_{0=}\frac{(2.1-0)!}{2^{1-1}.0!.(1-0)!} = 1$ en $a_0 = b_0 = 1$

Voor 2de orde filter is $n = 2$ en $i = 0\ en\ 1$

Dan wordt onze formule:

$b_{0=}\frac{(2.2-0)!}{2^{2-0}.0!.(2-0)!} = 3$ en $a_0 = b_0 = 3$ en

$b_{1=}\frac{(2.2-1)!}{2^{2-1}.1!.(2-1)!} = 3$ en

$b_{2=}\frac{(2.2-2)!}{2^{2-1}.2!.(2-2)!} = 1$

Zo ook voor een 3de orde filter wordt onze formule:

$b_{0=}\frac{(2.3-0)!}{2^{3-0}.0!.(3-0)!} = 15$ en $a_0 = b_0 = 15$ en

$b_{1=}\frac{(2.3-1)!}{2^{3-1}.1!.(3-1)!} = 15$ en

$b_{2=}\frac{(2.3-2)!}{2^{3-2}.2!.(3-2)!} = 6$ en

$b_{3=}\frac{(2.3-3)!}{2^{3-3}.3!.(3-3)!} = 1$

enz. voor het uitrekenen van de a_0 en b_n van hogere orde filters.
Er is nog een andere recursieve formule die ook in dat zelfde document is uitgelegd.
Men ziet in de formule dat men dit nog op een andere manier kan neerschrijven namelijk $a_0 = b_0$ en $B^n(s) = (2n-1).B^{n-1}(s) + s^2.B^{n-2}(s)$ en als men daarenboven weet dat $B^0(s) = 1$ en $B^1(s) = s+1$ dan kan men met deze formule ook alle b_n getallen vinden.
Laten we dit even uit proberen voor een Bessel functie van orde 3. Zo zal

$B^2(s) = (2.2-1).B^{2-1}(s) + s^2.B^{2-2}(s) = 3.(s+1) + 1 = 3.s + 3 + s^2 = s^2 + 3.s + 3$

En zo ook zal

$$B^3(s) = (2.3 - 1).B^{2-1}(s) + s^2.B^{3-2}(s) = 5(s^2 + 3.s + 3) + s^2.(s+1)$$
$$= 5.s^2 + 15.s + 15 + s^3 + s^2 = s^3 + 6.s^2 + 15.s + 15$$

En $a_0 = b_0 = 15$

En voor hogere orde Bessel filters volgt men verder deze recursieve formule.

3. Voorbeeld

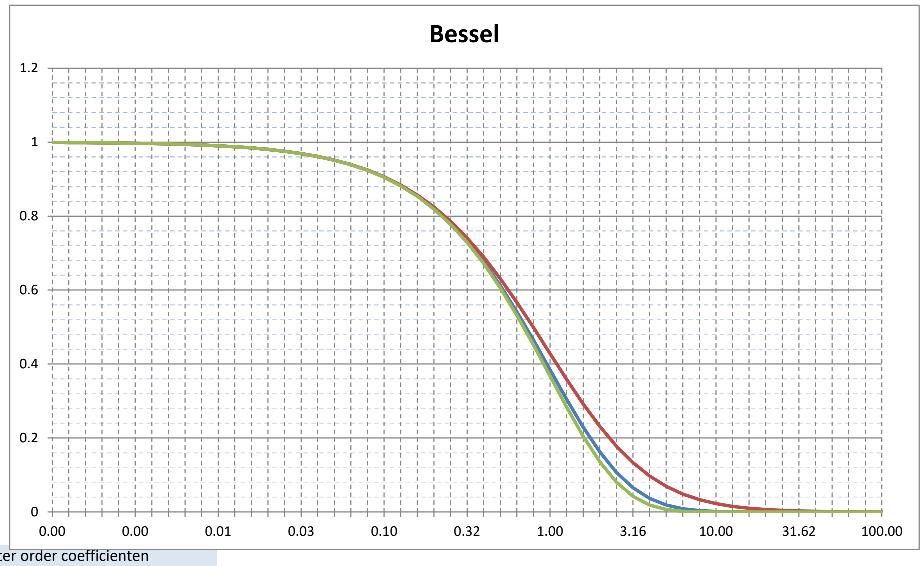
Op een EXEL sheet heb ik dit eens uitgerekend tot een Bessel orde filter van 1 tot 10.

BESSEL coeff						n	number	n	BCF	
ai	a6	a0	ai/a0	a2		6	0	2	1.3616	1.258925412
0	10395	10395	1	3	n			3	1.7557	
1	10395		1	3		2		4	2.1131	
2	4725		0.454545455	1				5	2.4274	
3	1260		0.121212121	#NUM!				6	2.7034	
4	210		0.02020202					7	2.9517	
5	21		0.002020202					8	3.1796	
6	1		9.62001E-05					9	3.3917	
7	#NUM!		#NUM!							
8	#NUM!		#NUM!							
9	#NUM!		#NUM!							
10	#NUM!		#NUM!							

H2(s) = a0/(1.BCF^2.s^2 + a1.BCF + a0.BCF)

noteer: s = s/ωc met ωc = -3dB cut-off frekwentie

BCF = Bessel Correction Factor



filter order coefficienten

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	15	105	945	10395	135135	2027025	34459425	654729075
	3	15	105	945	10395	135135	2027025	34459425	654729075
	1	6	45	420	4725	62370	945945	16216200	310134825
		1	10	105	1260	17325	270270	4729725	91891800
			1	15	210	3150	51975	945945	18918900
				1	21	378	6930	135135	2837835
					1	28	630	13860	315315
						1	36	990	25740
							1	45	1485
								1	55
									1

	2de orde	3de orde	4de orde	5de orde	6de orde	
A	0.142857	0.106383	0.089285714	0.079727	0.07374066	Vo/Vin
f/fc	3	3	3	3	3	f/fc
1/A	7	9.4	11.2	12.54286	13.561039	Vin/Vo
20log(1/A)	16.90196	19.46256	20.98436045	21.96793	22.6458593	dB

grafiek	F(Bn=6)
0.001	0.999000545
0.0012589	0.998741939
0.0015849	0.998416476
0.0019953	0.998006907
0.0025119	0.997491552
0.0031623	0.99684317
0.0039811	0.99602756
0.0050119	0.995001802
0.0063096	0.993712088
0.0079433	0.992091027
0.01	0.990054334
0.0125893	0.987496773
0.0158489	0.98428724
0.0199526	0.980262852
0.0251189	0.975221958
0.0316228	0.968916035
0.0398107	0.961040548
0.0501187	0.951225098
0.0630957	0.939023493
0.0794328	0.923904993
0.1	0.90524878
0.1258925	0.882344956
0.1584893	0.854406932
0.1995262	0.820602036
0.2511886	0.780109044
0.3162278	0.732212428
0.3981072	0.676441802
0.5011872	0.61275874
0.6309573	0.541778678
0.7943282	0.464990282
1	0.384900209
1.2589254	0.304999118
1.5848932	0.229441642
1.9952623	0.162395735
2.5118864	0.107165072
3.1622777	0.065376388
3.9810717	0.036615552
5.0118724	0.018744507
6.3095735	0.008760991
7.9432824	0.003747457
10	0.001475128
12.589254	0.000538574
15.848932	0.000184057
19.952623	5.94361E-05
25.118864	1.83006E-05
31.622777	5.41692E-06
39.810717	1.55242E-06
50.118724	4.33382E-07
63.095735	1.18448E-07
79.432824	3.18261E-08
100	8.43539E-09

Figuur 1

In deze EXEL sheet heb ik met de boven bekomen formules drie curven getekend, namelijk de groene lijn die niets anders is dan

$$H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{e^{+s}} = e^{-s}$$

met $s = j\omega$ als een logaritmische x_{as} en $H(s)$ als y_{as}. En de rode lijn een 2de orde Bessel filter en de blauwe lijn een 6de orde Bessel filter.

Nu worden deze formules in de praktijk omgevormd in een reeks van 2de orde filters (actieve filters) zoals uitgelegd in mijn andere documenten over filters. Men ziet duidelijk als de orde van de filter groter wordt de curve de $H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{e^{+s}} = e^{-s}$ sterk benadert.

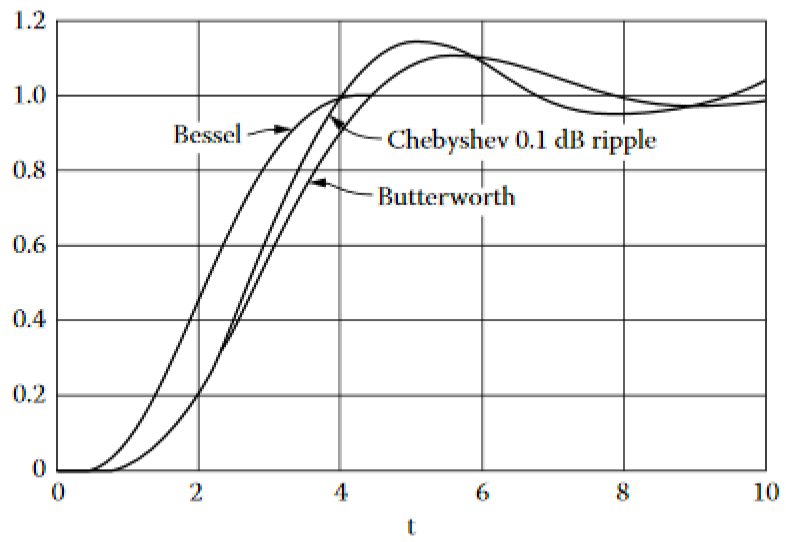
4. Orde van een Bessel functie

Normaal als men een filter wil maken dan heeft men een bepaald doel voor ogen en begint men met een bepaald aantal gegevens zoals de maximale pass-band verzwakking tot een bepaalde frequentie en ook de minimale verzwakking in de stop-band. En met deze gegevens bepaald men dan de minimale orde(n) van het filter. Dit is volledig uitgelegd in mijn document “Low-pass Butterworth document”.

Maar voor een Bessel filter is dit een ander verhaal, omdat dit filter in de eerste plaats geïnteresseerd is in een maximale groep opschuiving voor alle frequenties.

Maar wat betekent dit? Wel dit wil voornamelijk zeggen dat het antwoord op een puls (van 0 volt naar 1 Volt geen” overshoot” of “undershoot” verschijnselen heeft, dus geen rimpels heeft en voor een impuls van 0 volt naar 1volt en terug naar 0 volt de uitkomst een vloeiende puls is (een Gaussian curve) die gelijk is aan $H(s) = e^{-x^2}$.Maar wel verschoven met een bepaalde vertraging (T) meestal in de orde van µs.

Dit is weergegeven in volgende figuur waarin duidelijk het verschil met Butterworth en Chebychev filters te zien is.



;URE 1.12 Step response for Bessel low-pass filters; $W_1 = 1$ rad/s and input step amplitude

.

Maar nergens in mijn documenten vond ik de formule om (n) uit te rekenen. Het was een zoekwerk naar een naald in een hooiberg tot dat ik op dit hierboven aangehaald document terecht kwam en na een ingewikkeld wiskundige uitleg, die ik met moeite kon volgen , en waar ik in dit document niet verder wil op ingaan tot de formule ontdekte dat

$$\alpha \cong \frac{10.\log(e).(\omega T)^2}{2.n-1}$$

Of in woorden. De verzwakking α van het signaal is gelijk aan $10.\log(e) = 4.34294482$ maal $\omega^2 = (2.\pi.f)^2$ voor een groep-delay T^2 maar omgekeerd evenredig met 2 maal het Bessel orde (n) minus 1.

Dus wens ik dat voor een bepaalde frequentie dat verzwakking van mijn signaal kleiner is dan -1dB bij een groep- delay van 10usec dan zal het orde van mijn filter groter moeten zijn dan $n > \frac{4.34294482.(2.\pi.fT)^2+\alpha}{2.\alpha}$

De curve van een Bessel filter is genormaliseerd dusdanig dat $H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = 1$ voor $\omega = 2.\pi.f = 0$ en dan geleidelijk daalt, in het begin zwak maar voorbij $\frac{\omega}{\omega_o} > 1$ sterke naar beneden gaat. Maar in alle andere type filters gaan alle curven voor gelijk welke orde (n) bij $\frac{\omega}{\omega_o} = 1$ door het -3dB punt of een daling van de amplitude tot 0.707V ten opzichte van 1V. Voor de Bessel functie is dat niet het geval, en dat is de hoofdreden waarom het zo moeilijk is een formule te vinden die de orde (n) definieert. De curve schuift gewoon op naar rechts met oplopende frequentie.

Maar om Bessel functies toch te kunnen vergelijken met die andere filters heeft men er bij iedere orde (n) een Bessel-Correctie-Factor (BCF) bijgevoegd. Deze BCF factor vindt men in sommige tafels terug en ik kom hier op terug. Maar laten we nu eens een oefening doen.

Oefening orde (n) voor een Bessel Low Pass Filter

Gegeven: bij een frequentie van 30 kHz wens ik dat er een groep-delay ontstaat van niet meer dan 10µs maar de verzwakking van mijn signaal bij 30kHz mag niet meer bedragen dan -1dB.

Oplossing: $20.log\frac{V_o}{V_{in}} = -1dB$ dit betekent dat $\alpha = \frac{V_o}{V_{in}} = 10^{\frac{-1}{20}} = 0.89125$ en $10.\log(e) = 4.34294482$ en $T = 10.10^{-6}$ en we weten dat $f = 30000Hz$ Hieruit volgt dat $n > \frac{4.34294482.(2.\pi.fT)^2+\alpha}{2.\alpha} = \frac{4.34294482.(2.\pi.30.10^3.10.10^{-6})^2+0.89125}{2.0.89125} = 9.156$ en dus een 10de order filter is nodig.

5. Invoering van "Bessel "Correction Factor" (BCF)

Om toch een Bessel filter te vergelijken met de beter bekende filters als Butterworth of Chebychev heeft men experimenteel voor iedere orde een correctie factor aan toegevoegd dusdanig dat ook alle Bessel filters op het punt dat $\frac{\omega}{\omega_c}$=1 ook precies een verzwakking heeft van $-3dB = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hierdoor wordt voor iedere orde iedere b_n , behalve b_0 met een zeker getal vermenigvuldigd.

De waarde van deze BCF heb ik onder andere terug gevonden, alsook de bijhorende grafieken in "Electronic Lectures.pdf Filter van Prêle Damien, vrij te downloaden van het internet.

n	BCF
2	1.3616
3	1.7557
4	2.1139
5	2.4274
6	2.7034
7	2.9517
8	3.1796
9	3.3917

Table 1.1: Bessel conversion factor

Dit betekent dat bijvoorbeeld in een tweede orde Bessel functie waarvan de transfer formule gelijk is aan $H(s) = \frac{a_0}{b_0+b_1.s+b_2.s^2} = \frac{3}{3+3.s+1.s^2} = \frac{1}{1+1.s+1/3.s^2}$ wordt nu

$$H(s) = \frac{a_0}{b_0+BCF.b_1.s+BCF^2 b_2.s^2} = \frac{1}{1+1.3616.s+0.618.s^2}$$

En het zijn deze cijfers die men terugvindt in tabellen van Bessel -Low Pass Filters.

De meest toepasbare tabel is in volgende tabel afgebeeld waarin de opdeling in eerste en tweede orde vergelijkingen reeds doorgevoerd is.

n	Bessel polynomials
2	$0.618s^2 + 1.3616s + 1$
3	$(0.756s+1)(0.4771s^2+0.9996s+1)$
4	$(0.4889s^2+1.3396s+1)(0.3889s^2+0.7742s+1)$
5	$(0.665s+1)(0.3245s^2+0.6215s+1)(0.4128s^2+1.1401s+1)$
6	$(0.2756s^2+0.513s+1)(0.3504s^2+0.9686s+1)(0.3887s^2+1.2217s+1)$
7	$(0.593s+1)(0.238s^2+0.4332s+1)(0.301s^2+0.8303s+1)(0.3394s^2+1.0944s+1)$
8	$(0.2087s^2+0.3727s+1)(0.2621s^2+0.7202s+1)(0.2979s^2+0.9753s+1)(0.3161s^2+1.1112s+1)$
9	$(0.538s+1)(0.231s^2+0.6319s+1)(0.1854s^2+0.3257s+1)(0.2635s^2+0.8710s+1)(0.2834s^2+1.0243s+1)$

6. Epiloog

Ik hoop dat te samen met mijn twee andere documenten over filters ik een overzicht heb gegeven en duidelijk heb aangeduid waar de verschillende getallen vandaan komen en wat hun betekenis ervan zijn.

Ik hoop dat vertrekkende van deze documenten men in staat is de documenten voor het berekenen van Low-Pass, High-Pass, Band-Pass en All-Pass filters kan begrijpen en uitrekenen.

Jan Spaenjers